MAT206 DİFERANSİYEL DENKLEMLER-II ARA SINAV SORULARI
A GRUBU **30.04.2021**

UYARI!!

- Sadece <u>4 soru</u> cevaplandırınız.
- **Aynı-benzer kağıtlar puanlandırılmayacaktır. Bireysel çözüm yapınız.**
- **Süre 100 dakikadır.**

1. $y'''+4y'=3\cos 2x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

2. $y^{(4)}-2y'''-3y''=x-2e^{-x}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3. $xy'''-y''=x^2$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

4. $x^2y''-xy'-3y=0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü $y_1(x)=x^3$ ise genel çözümünü bulunuz.

5. $x^2y''+xy'-y=x$ diferansiyel denkleminin homojen kısmının $y(x)=x^a$, $(x\neq 0, a\in\mathbb{R})$ şeklinde iki çözümü olduğuna göre denklemin genel çözümünü bulunuz.

6. Temel çözüm kümesi $T=\{e^x\sin 2x,\ e^x\cos 2x,\ 1,\ x\}$ olan diferansiyel denklemi bulunuz.

Başarılar... Doç.Dr. Fatma HIRA

Cevaplar

① $y'''+4y'=0 \Rightarrow \lambda^3+4\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2+4)=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=2i,\ \lambda_3=-2i$
$\alpha=0,\ \beta=2$

$y_1=e^{0x}=1$, $y_2=e^{0x}\cos 2x=\cos 2x$, $y_3=e^{0x}\sin 2x=\sin 2x$ olup

$y_h=c_1.1+c_2\cos 2x+c_3\sin 2x$ homojen kısmın genel çözümüdür.

• özel çözüm belirsiz katsayılar yöntemi ile $B(x)=3\cos 2x$ için

$y_ö=A\cos 2x+B\sin 2x$ olarak aranırsa y_h ile ortak fonksiyonlar var olduğu için $y_ö=Ax\cos 2x+Bx\sin 2x$ formunda aranmalıdır.

Ters operatör yöntemi ile özel çözümü ararsak

$$y_ö=\frac{1}{D^3+4D}3\cos 2x \qquad D^2\to -2^2=-4 \text{ yazarsak } f(-4)=0 \text{ olur}$$

Bu durumda $y_ö=Re\left\{\frac{1}{D^3+4D}3e^{2ix}\right\}$ dir

$$v(x)=\frac{1}{D^3+4D}3e^{2ix}=3.\frac{1}{D(D+2i)(D-2i)}e^{2ix}=-\frac{3}{8}\frac{1}{D-2i}e^{2ix} \qquad D\to D+2i$$

$$=-\frac{3}{8}e^{2ix}\frac{1}{D}1=-\frac{3}{8}e^{2ix}x=-\frac{3x}{8}(\cos 2x+i\sin 2x)$$

$y_ö=Re\,v(x)=-\frac{3x}{8}\cos 2x$ bulunur.

Genel çözüm $y=y_h+y_ö=c_1+c_2\cos 2x+c_3\sin 2x-\frac{3x}{8}\cos 2x$ bulunur..

(2) $y^{(4)} - 2y''' - 3y'' = x - 2e^{-x}$

$y^{(4)} - 2y''' - 3y'' = 0 \Rightarrow \lambda^4 - 2\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0 \Rightarrow$

$\lambda^2(\lambda-3)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow y_1 = e^{0x} = 1, \ y_2 = xe^{0x} = x$

$\lambda_3 = 3 \Rightarrow y_3 = e^{3x}$

$\lambda_4 = -1 \Rightarrow y_4 = e^{-x}$

$T = \{1, x, e^{3x}, e^{-x}\}$ için $y_h = c_1 \cdot 1 + c_2 x + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-x}$ dır.

- $B_1(x) = x$ için özel çözüm belirsiz katsayılar yöntemi ile $y_{ö1} = Ax + B$ formunda aranırsa T ile ortak eleman olmayacak şekilde $y_{ö1} = Ax^3 + Bx^2$ olarak aranmalıdır.

$y_ö' = 3Ax^2 + 2Bx$, $y_ö'' = 6Ax + 2B$, $y_ö''' = 6A$, $y_ö^{(4)} = 0$ için

$0 - 12A - 18Ax - 6B = x \Rightarrow A = -\frac{1}{18}, B = \frac{1}{9} \Rightarrow y_{ö1} = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{9}x^2$ olur

- $B_2(x) = -2e^{-x}$ için özel çözüm

$$y_{ö2} = \frac{1}{D^2(D-3)(D+1)}(-2e^{-x}) = \frac{-2}{1.(-4)}\frac{1}{D+1}e^{-x} = \frac{1}{2}e^{-x}\frac{1}{D}1$$

$D \to -1$, $D \to -1$; $D \to D-1$; $= \frac{1}{2}e^{-x}x$

$y_{ö2} = \frac{1}{2}xe^{-x}$ dır

$y_ö = y_{ö1} + y_{ö2} = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{2}xe^{-x}$ olup genel çözüm

$y = y_h + y_ö = c_1 + c_2 x + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-x} - \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{2}xe^{-x}$ bulunur.

(3) $xy''' - y'' = x^2$ değişken katsayılı denklem y bağımlı değişkeni olmadığı için var olan en düşük türevi için $y'' = u$ dersek $y''' = u'$ olup $x.u' - u = x^2 \rightarrow u' - \frac{1}{x} = x$ 1.M.10 lineer dif denk tir.

Bunun çözümü $\lambda(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ olmak üzere

$u.\frac{1}{x} = \int x.\frac{1}{x}dx + c_1 \Rightarrow \frac{u}{x} = x + c_1 \Rightarrow u = x^2 + c_1 x$ olur.

$y'' = u \Rightarrow y'' = x^2 + c_1 x \Rightarrow y' = \frac{x^3}{3} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2$ olup buradan bir kez daha integral alınırsa $y = \frac{x^4}{12} + c_1\frac{x^3}{6} + c_2 x + c_3$

genel çözümü bulunur.

4) $x^2y'' - xy' - 3y = 0$, $y_1 = x^3$

$y'' - \frac{1}{x}y' - \frac{3}{x^2}y = 0$ yazılırsa Abel formülünden

$$\begin{vmatrix} x^3 & y \\ 3x^2 & y' \end{vmatrix} = c_1 . e^{-\int -\frac{1}{x}dx} \rightarrow x^3y' - 3x^2y = c_1 . x \quad \text{olur.}$$

$e^{\ln x} = x$

Her iki taraf x^6 ile bölünürse $\left(\frac{y}{x^3}\right)' = \frac{c_1}{x^5}$ olup

$\frac{y}{x^3} = \int \frac{c_1}{x^5}dx + c_2 \rightarrow \frac{y}{x^3} = -\frac{c_1}{4x^4} + c_2$

$y = -\frac{c_1}{4x} + c_2x^3$ bulunur

veya $y = y_1 . u = x^3u$ dönüşümü ile mertebe düşürülebilir veya çözülebilecek formda denklem elde edilerek çözüm bulunabilir.

5) $x^2y'' + xy' - y = 0$, $y = x^a$ çözüm ise denklemi sağlar. Buna göre $y' = ax^{a-1}$, $y'' = a(a-1)x^{a-2}$ için

$a(a-1)x^a + ax^a - x^a = 0 \Rightarrow (a^2-1)\underbrace{x^a}_{\neq 0} = 0 \rightarrow a^2 - 1 = 0$

$a = 1, a = -1$

olup $y_1 = x$ ve $y_2 = x^{-1}$ homojen kısmın çözümleri için

$y_h = c_1 . x + c_2 x^{-1}$ olur.

$x^2y'' + xy' - y = x$ homojen olmayan denklemin özel çözümü sabitin değişimi yöntemi ile $y_ö = c_1(x) . x + c_2(x)x^{-1}$ olarak ararsak $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} c_1'(x) . x + c_2'(x) . x^{-1} = 0 \\ c_1'(x) . 1 - c_2'(x) . x^{-2} = \frac{1}{x} \end{array}\right\} \text{denklem sisteminin çözümünden}$$

$c_2'(x)\left(x^{-1} + x^{-1}\right) = -1 \Rightarrow c_2'(x) = -\frac{x}{2} \rightarrow c_2(x) = -\frac{x^2}{4}$

$c_1'(x) . x - \frac{x}{2} . x^{-1} = 0 \rightarrow c_1'(x) . x = \frac{1}{2} \rightarrow c_1'(x) = \frac{1}{2x} \Rightarrow c_1(x) = \frac{1}{2}\ln x$

olup $y_ö = c_1(x)x + c_2(x)\frac{1}{x} = \frac{x}{2}\ln x - \frac{x}{4}$ bulunur. Genel çözüm

$y = y_h + y_ö = c_1x + \frac{c_2}{x} + \frac{x}{2}\ln x - \frac{x}{4}$ veya $y = c_1x + \frac{c_2}{x} + \frac{x}{2}\ln x$ bulunur.

(6) $T = \{e^x \sin 2x,\ e^x \cos 2x,\ 1,\ x\}$ için

$y_1 = e^x \sin 2x$, $y_2 = e^x \cos 2x$) $\alpha = 1$, $\beta = 2$ $\Rightarrow$ $\lambda = 1+2i$, $\lambda = 1-2i$ $\rightarrow$ $(\lambda-1-2i)(\lambda-1+2i)$

$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda + \cancel{2i\lambda} - \lambda + 1 - 2i - \cancel{2i\lambda} + 2i + 4$

$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 5$ çarpan olur.

$y_3 = 1$, $y_4 = x$) $\lambda = 0$ katlı kök olup λ^2 çarpandır.

Buna göre karakteristik polinom

$\ell(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2$ olup dif denk

$y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$ bulunur.

MAT206 DİFERANSİYEL DENKLEMLER-II ARA SINAV SORULARI

B GRUBU **30.04.2021**

UYARI!!

- Sadece 4 soru cevaplandırınız.
- Aynı-benzer kağıtlar puanlandırılmayacaktır. Bireysel çözüm yapınız.
- Süre 100 dakikadır.

1. $y'''+4y'=2\sin 2x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

2. $y^{(4)}+2y'''-3y''=2e^{x}-x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3. $y'''-\frac{1}{x}y''=x^3$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

4. $x^2y''+xy'-4y=0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü $y_1(x)=x^2$ ise genel çözümünü bulunuz.

5. $x^2y''-2xy'+2y=x^5$ diferansiyel denkleminin homojen kısmının $y(x)=x^a$, $(x\neq 0, a\in\mathbb{R})$ şeklinde iki çözümü olduğuna göre denklemin genel çözümünü bulunuz.

6. Temel çözüm kümesi $T=\{e^{-2x}\sin x,\ e^{-2x}\cos x,\ x,\ 1\}$ olan diferansiyel denklemi bulunuz.

Başarılar... Doç.Dr. Fatma HIRA

Cevaplar

1) $y'''+4y'=0 \Rightarrow \lambda^3+4\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2+4)=0 \Rightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=2i, \lambda_3=-2i$

$\alpha=0, \beta=2$

$y_1=e^{0x}=1$, $y_2=e^{0x}\cos 2x=\cos 2x$, $y_3=e^{0x}\sin 2x=\sin 2x$ olup

$y_h=c_1+c_2\cos 2x+c_3\sin 2x$ olur.

- Özel çözüm belirsiz katsayılar yöntemi ile

$y_ö=Ax\cos 2x+Bx\sin 2x$ formunda aranmalıdır.

Ters operatör yöntemi ile özel çözüm ararsa

$y_ö=\frac{1}{D^3+4D}(2\sin 2x)$ $\quad l(-D^2)=l(-2^2)=0$ olacağından

$y_ö=\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{D^3+4D}2e^{2ix}\right\}$ dir.

$v(x)=\frac{1}{D^3+4D}2e^{2ix}=2.\frac{1}{D(D+2i)(D-2i)}e^{2ix}=-\frac{2}{8}\frac{1}{D-2i}e^{2ix}$ $\quad D\to D+2i$

$=-\frac{1}{4}e^{2ix}\frac{1}{D}1=-\frac{1}{4}e^{2ix}x=\frac{-x}{4}(\cos 2x+i\sin 2x)$

$y_ö=\operatorname{Im}v(x)=-\frac{x}{4}\sin 2x$ bulunur.

Genel çözüm $y=y_h+y_ö=c_1+c_2\cos 2x+c_3\sin 2x-\frac{x}{4}\sin 2x$ bulunur.

② $y^{(4)} + 2y''' - 3y'' = 2e^x - x$

$y^{(4)} + 2y''' - 3y'' = 0 \Rightarrow \lambda^4 + 2\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow y_1 = e^{0x} = 1, \quad y_2 = xe^{0x} = x$

$\lambda_3 = -3 \Rightarrow y_3 = e^{-3x}$

$\lambda_4 = 1 \Rightarrow y_4 = e^x$

$T = \{1, x, e^{-3x}, e^x\}$ için

$y_h = c_1 1 + c_2 x + c_3 e^{-3x} + c_4 e^x$ olur

• $B_1(x) = 2e^x$ için özel çözüm ters operatör yöntemi ile

$$y_{ö1} = \frac{1}{D^2(D+3)(D-1)} 2e^x = \frac{2}{4}\frac{1}{D-1}e^x = \frac{1}{2}e^x\frac{1}{D}1 = \frac{1}{2}e^x x$$

$D \to D+1$

olur.

• $B_2(x) = -x$ için özel çözüm belirsiz katsayılar yöntemi ile

$y_{ö2} = Ax + B$ formunda aranmalıdır. T ile lineer bağımsız olacak şekilde $y_{ö2} = Ax^3 + Bx^2$ olarak aranmalıdır.

$y_{ö2}' = 3Ax^2 + 2Bx, \quad y_{ö2}'' = 6Ax + 2B, \quad y_{ö2}''' = 6A, \quad y_{ö2}^{(4)} = 0$ için

$0 + 12A - 18Ax - 6B = -x \Rightarrow -18A = -1 \quad 12A - 6B = 0$

$A = \frac{1}{18} \quad B = \frac{1}{9}$

$y_{ö2} = \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{9}x^2$ olur.

$y_ö = y_{ö1} + y_{ö2} = \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{9}x^2$ olur.

Genel çözüm $y = y_h + y_ö = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-3x} + c_4 e^x + \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{9}x^2$ olur

③ $y''' - \frac{1}{x}y'' = x^3$

$y'' = u$ dersek $y''' = u'$ olup denklem $u' - \frac{1}{x}u = x^3$ 1.M.1.D

lineer denklem olur. $\lambda(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ olmak üzere

$u \cdot \frac{1}{x} = \int x^3 \frac{1}{x} dx + c_1 \Rightarrow \frac{u}{x} = \frac{x^3}{3} + c_1 \Rightarrow u = \frac{x^4}{3} + c_1 x$ olur.

$y'' = u \Rightarrow y'' = \frac{x^4}{3} + c_1 x \Rightarrow y' = \frac{x^5}{15} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2$ dan bir kez

daha integral alınırsa $y = \frac{x^6}{90} + c_1\frac{x^3}{6} + c_2 x + c_3$ genel

çözümü bulunur.

CamScanner ile tarandı

(4) $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$, $y_1 = x^2$ için

$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{4}{x^2} y = 0$ olup Abel formulundan

$$\begin{vmatrix} x^2 & y \\ 2x & y' \end{vmatrix} = c_1 . \underbrace{e^{-\int \frac{1}{x} dx}}_{e^{-\ln x} = \frac{1}{x}} \Rightarrow x^2 y' - 2xy = c_1 . \frac{1}{x}$$ olup her

iki taraf x^4 ile bölünürse $\left(\frac{y}{x^2}\right)' = \frac{c_1}{x^5}$ olup buradan

$$\frac{y}{x^2} = \int \frac{c_1}{x^5} dx + c_2 \Rightarrow \frac{y}{x^2} = -\frac{c_1}{4x^4} + c_2$$

$$\underbrace{y = -\frac{c_1}{4x^2} + c_2 x^2}$$ genel çözümdür.

veya

$y = y_1 u = x^2 u$ dönüşümü ile mertebe düşürülerek de çözülebilir.

(5) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y = x^a$ çözüm ise denklemi sağlar.

$y' = ax^{a-1}$, $y'' = a(a-1)x^{a-2}$ olup

$a(a-1)x^a - 2ax^a + 2x^a = 0 \Rightarrow (a^2 - 3a + 2)\underbrace{x^a}_{\neq 0} = 0$

$a = 2$, $a = 1$ için

$y_1 = x^2$, $y_2 = x$ lineer bağımsız çözümler olup

$y_h = c_1 x^2 + c_2 x$ olur.

$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3$ homojen olmayan denklemin özel

çözümü cabitin değişimi yöntemi ile $y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = x$

$y_ö = c_1(x) x^2 + c_2(x) x$ olarak ararsak

$$\left.\begin{aligned} c_1'(x) x^2 + c_2'(x) x &= 0 \\ -x/ \ c_1'(x) . 2x + c_2'(x) . 1 &= x \end{aligned}\right\}$$ denklem sistemi elde edilir.

$c_1'(x)(x^2 - 2x^2) = -x^2 \Rightarrow c_1'(x) = 1 \Rightarrow \underline{c_1(x) = x}$

$1 . x^2 + c_2'(x) . x = 0 \Rightarrow c_2'(x) = -x \Rightarrow \underline{c_2(x) = \frac{-x^2}{2}}$

için $y_ö = c_1(x) . x^2 + c_2(x) x = x^3 - \frac{x^3}{2} = \frac{x^3}{2}$ özel çözüm

bulunur. Genel çözüm

$$\underline{y = y_h + y_ö = c_1 x^2 + c_2 . x + \frac{x^3}{2}}$$ bulunur.

CamScanner ile tarandı

⑥ $T = \{ e^{-2x}\sin x,\ e^{-2x}\cos x,\ x,\ 1 \}$ için

$y_1 = e^{-2x}\sin x$, $y_2 = e^{-2x}\cos x$) $\alpha=-2$, $\beta=1$ $\Rightarrow$ $\lambda=-2+i$, $\lambda=-2-i$ $\Rightarrow$ $(\lambda+2-i)(\lambda+2+i)$

$= \lambda^2+2\lambda+\cancel{\lambda i}+2\lambda+4+2i-\cancel{\lambda i}-2i+1$

$= \lambda^2+4\lambda+5$ çarpandır

$y_3 = x$, $y_4 = 1$) için λ^2 çarpan olup karakteristik denklem

$\ell(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2+4\lambda+5) = \lambda^4+4\lambda^3+5\lambda^2$ olur. Buna

göre dif denk $y^{(4)}+4y'''+5y''=0$ bulunur.